Une formule peut en cacher une autre

PAR GÉRY HUVENT

Cette courte note a pour but de présenter une formule peu connue et quelques applications.

Dans tous le texte on utilise la notation internationale $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

1. Une égalité

Proposition 1. *Quels que soient les réels* $x, a_1, .., a_n$ *tels que* $x(x+a_1)..(x+a_N) \neq 0$

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{a_1a_2..a_{k-1}}{(x+a_1)..(x+a_k)} = \frac{1}{x} - \frac{a_1a_2..a_N}{x(x+a_1)..(x+a_N)}$$

où dans la somme de droite par convention le premier terme est $\dfrac{1}{x+a_1}$.

Preuve: $\triangleright$On pose $A_k = \dfrac{a_1a_2\cdots a_{k-1}}{(x+a_1)\cdots(x+a_k)}$ ($A_0 = \dfrac{1}{x+a_1}$) et $B_k = \dfrac{a_1a_2\cdots a_k}{x\,(x+a_1)\cdots(x+a_k)}$ ($B_0 = \dfrac{1}{x}$), on vérifie que $B_{k-1} - B_k = A_k$. Ainsi par sommation, on obtient le résultat $\triangleleft$

On va considérer quelques applications de cette égalité. Le principe de base est de choisir les valeurs de a_k et de x de façon à ce que les produits soient simples.

La liste d'exemple est loin d'être exhaustive, on a privilégié les sommes faisant intervenir les coefficients du binômes. Les détails des calculs sont laissés au lecteur.

2. Relations avec les coefficients du binôme

On commence par retrouver deux relations classiques sur les coefficients du binôme.

a) $a_k = (q+k)$ et $x = -q \in \mathbb{N}^*$

On obtient alors

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{(q+1)\,..\,(q+k-1)}{k!} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{q}\binom{q+k-1}{q-1} = -\frac{1}{q} + \frac{(q+1)\,..\,(q+N)}{qN!} = -\frac{1}{q} + \frac{1}{q}\binom{q+N}{q}$$

On retrouve avec $p = q-1$ et $n = N+p$ la formule classique

$$\boxed{\text{Si } n \geq p, \quad \sum_{k=p}^{n} \binom{k}{p} = \binom{n+1}{p+1}}$$

b) $a_k = (q-k)$ et $x = -q \in \mathbb{N}^*$

On laisse le soin au lecteur d'établir que

$$\text{Si } q > 0, N \geq 0 \quad \sum_{k=0}^{N} (-1)^k \binom{q}{k} = (-1)^N \binom{q-1}{N}$$

La relation suivante est un peu moins classique:

c) $a_k = -k$ et $x = q \geq 2$

On a, si $1 \leq N \leq q-1$,

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(q-1)\cdots(q-k)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^{k-1}}{(q-1)\binom{q-2}{k-1}} = \frac{1}{q}\left(1 - \frac{(-1)^N}{\binom{q-1}{N}}\right),$$

Ce qui donne en posant $j = k-1$, $p = q-2$ et $n = N-1$,

$$\sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^j}{\binom{p}{j}} = \frac{p+1}{p+2}\left(1 - \frac{(-1)^{n+1}}{\binom{p+1}{n+1}}\right)$$

ce qui dans le cas où $n = p$ peut s'écrire

$$\boxed{\sum_{j=0}^{p} \frac{(-1)^j}{\binom{p}{j}} = \frac{p+1}{p+2}\left(1 + (-1)^p\right)}$$

Relation évidente dans le cas où p est impair.

On peut obtenir d'autres formules par des choix judicieux de x et a_k. Pour conclure, on propose au lecteur de montrer que

si $q > 0$, $\displaystyle\sum_{k=0}^{q} \frac{\binom{q}{k}}{\binom{2q-1}{k}} = 2$

3. Séries utilisant les coefficients du binôme.

a) $a_k = -\dfrac{k+1}{5k-1}$ et $x = 1$

On obtient alors facilement

$$\boxed{\sum_{k=1}^{N} (-1)^{k-1} \frac{5k-1}{\binom{2k}{k}} = 1 - (-1)^N \frac{N+1}{\binom{2N}{N}}}$$

(cf le "coin des problèmes", énoncé n°60 in Quadrature n°25). On peut de même calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{k-1}{\binom{2k}{k}}$.

b) $a_k = k$ et $x = q-1 \in \mathbb{N}$

On obtient alors $\displaystyle\sum_{k=1}^{N} \frac{(k-1)!}{(q)\cdots(q+k-1)} = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{q\binom{q+k-1}{q}} = \frac{1}{q-1}\left(1 - \frac{1}{\binom{q-1+N}{q-1}}\right)$, et en passant à la limite quand N tend vers l'infini $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{q\binom{q+k-1}{q}} = \frac{1}{q-1}$. On obtient facilement un équivalent du reste à l'aide de la formule de Stirling.

Cette dernière égalité peut encore s'écrire, (on comparera avec la démonstration proposée par Yann Ollivier dans "Le nombre d'extraterrestres" in Quadrature n°29)

$$\boxed{\text{Si } q \geq 2, \sum_{n=q}^{\infty} \frac{1}{\binom{n}{q}} = \frac{q}{q-1}}$$

4. Une expression peu connue de $\zeta(3)$

On se propose pour conclure de prouver que

$$\boxed{\zeta(3) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} = \frac{5}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3 \binom{2n}{n}}}$$

La méthode utilisée est due à R.Apéry. On choisit $a_k = -k^2$ et $x = n^2$ et $N = n-1$. On obtient alors, en remarquant que $n^2\left(n^2-1^2\right)\cdots\left(n^2-(n-1)^2\right) = \dfrac{(2n)!}{2}$,

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!^2}{(n^2-1^2)\cdots(n^2-k^2)} = \frac{1}{n^2} - \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!^2}{n^2(n^2-1^2)\cdots\left(n^2-(n-1)^2\right)} = \frac{1}{n^2} - \frac{2(-1)^{n-1}}{n^2\binom{2n}{n}}$.

Soit $a_{n,k} = \dfrac{1}{2}\dfrac{(k-1)!^2(n-k)!}{k(n+k)!}$ alors

$$(-1)^k n\left(a_{n,k} - a_{n-1,k}\right) = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!^2}{(n^2-1^2)\cdots(n^2-k^2)}$$

Ceci donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{N}\sum_{k=1}^{n-1} (-1)^k\left(a_{n,k} - a_{n-1,k}\right) =$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^3} - 2\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}} =$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k \sum_{n=k+1}^{N} \left(a_{n,k} - a_{n-1,k}\right) =$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} (-1)^k\left(a_{N,k} - a_{k,k}\right) =$

$\displaystyle\sum_{k=1}^{N-1} \frac{(-1)^k}{2k^3\binom{N+k}{k}\binom{N}{k}} + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k^3\binom{2k}{k}}$

En regroupant les résultats, on a

$$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^3} = \frac{5}{2}\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^{n-1}}{n^3\binom{2n}{n}} + \sum_{k=1}^{N} \frac{(-1)^k}{2k^3\binom{N+k}{k}\binom{N}{k}}$$

Pour conclure, il suffit de remarquer que le deuxième terme de droite tend vers zéro quand N tend vers l'infini.

L'expression obtenue de $\zeta(3)$ permet, à l'aide du développement en série entière de $\arg sh(t)$, d'établir les expressions intégrales suivantes

$\zeta(3) = 10 \displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\arg sh(t)^2}{t} dt =$

$10 \displaystyle\int_0^{\ln(\phi)} t^2 \coth(t) dt$ où $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. $\square$