A propos d'un oral de l'école polytechnique

Géry HUVENT

10 janvier 2015

1 Le problème

Un des sujets posés à l'oral 2014 de l'école polytechnique était le suivant :

$$\text{Montrer que la suite } \left(\lfloor n\sqrt{2}\rfloor\right)_{n\geqslant 0} \text{ contient une infinité de puissances de 2.}$$

où, en accord avec la convention des programmes, $\lfloor x\rfloor$ désigne la partie entière du réel x.

2 Analyse heuristique et numérique du problème

2.1 Une recherche par ordinateur

On peut chercher les premières valeurs de n pour lesquelles $\lfloor n\sqrt{2}\rfloor$ est bien une puissance de 2. On appelle solution du problème tout entier n tel que $\lfloor n\sqrt{2}\rfloor$ est une puissance de 2. Le programme suivant, en Maple, donne rapidement les premières solutions.

```
Untitled (5) - [Server 1]
> for n from 1 to 15000
  do
  if is(ln(floor(n*sqrt(2)))/ln(2),integer)
    then print(n);
   fi;
  od:
                         1
                         2
                         3
                         6
                         12
                         23
                         91
                         2897
                         5793
>
```

On obtient les premiers termes de la suite A103341 de OEIS (ref [OEIS]). L'examen des premiers termes ne révèle pas de régularité. La seule remarque à faire est que le quotient de deux termes successifs est toujours proche d'une puissance de 2.

$$\begin{aligned} \frac{2}{1} &= 1\ ; \frac{3}{2} = 1,5\ ;\ \frac{6}{3} = 2\ ;\ \frac{12}{6} = 2\ ;\ \frac{23}{12} = 1,916\cdots\ ;\ \frac{91}{23} = 3,956\cdots \\ \frac{2897}{91} &= 31,83\cdots\ ;\ \frac{5793}{2897} = 1,9997\cdots \end{aligned}$$

2.2 Analyse heuristique du problème

Supposons que n soit tel que $\lfloor n\sqrt{2}\rfloor$ soit une puissance de 2. Peut-on construire un entier $m > n$ ayant la même propriété ? Si $\lfloor n\sqrt{2}\rfloor = 2^p$, alors $n\sqrt{2} = 2^p + r$ où $0 < r < 1$ Le réel r est la partie fractionnaire de $n\sqrt{2}$, on a $r \neq 0$ sinon $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$. En multipliant par 2 la dernière égalité, on obtient $2n\sqrt{2} = 2^{p+1} + 2r$. Si $0 < r < \frac{1}{2}$, on en déduit que

$\lfloor 2n\sqrt{2}\rfloor = 2^{p+1}$ et on a construit une nouvelle solution. C'est ce qui se passe parfois dans la suite, lorsque le rapport de deux solutions consécutives vaut 2.
Si $r \geqslant \frac{1}{2}$, alors $2r \geqslant 1$. On est tenté alors de considérer $2n\sqrt{2}-\sqrt{2} = (2n-1)\sqrt{2} = 2^{p+1} + \left(2r-\sqrt{2}\right)$. On a alors $-\sqrt{2} < 2r - \sqrt{2} < 2 - \sqrt{2} < 1$. Si $0 < 2r - \sqrt{2} < 1$, on a une nouvelle solution, à savoir $2n-1$. C'est ce qui se passe pour les solutions 2 puis 3, et 12 puis 24.
Si $2r - \sqrt{2} < 0$, on peut alors considérer $4n\sqrt{2} = 2^{2p+2} + 4r$ puis $4n\sqrt{2} - \sqrt{2} = 2^{2p+2} + 4r - \sqrt{2}$. Si $0 < 4r - \sqrt{2} < 1$ alors $4n-1$ donne une nouvelle solution. C'est le cas lorsque l'on passe de 23 à $91 = 4 \times 23 - 1$.
Sinon, on examine alors $4n\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 2^{2p+2} + 4r - 2\sqrt{2}$ et on peut conclure si $0 < 4r - 2\sqrt{2} < 1$.
Il s'agit maintenant de formaliser toute cela, et de prouver que l'on peut toujours construire une solution plus grande. Ainsi l'ensemble des n tels que $\lfloor n\sqrt{2}\rfloor$ est bien infini.

2.3 Une solution au problème posé

Si n est une solution du problème, on peut en construire une autre si on trouve deux entiers $(q,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$ tels que $2^q r - k\sqrt{2} \in \left]0,1\right[$. En effet, dans ce cas, on a

$$(2^q n - k)\sqrt{2} = 2^{p+q} + \left(2^q r - k\sqrt{2}\right) \text{ et } 0 < 2^q r - k\sqrt{2} < 1$$

et ainsi $\lfloor (2^q n - k)\sqrt{2}\rfloor = 2^{p+q}$. Ce qui prouve que $2^q n - k$ est une autre solution. Il restera ensuite à vérifier que la solution construite est bien strictement supérieure à n.
La condition $2^q r - k\sqrt{2} \in \left]0,1\right[$ peut s'écrire

$$k < 2^{q-1} r\sqrt{2} < k + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Puisque $\dfrac{1}{2} < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, il suffit de trouver $q \geqslant 1$ et k tels que $k < 2^{q-1} r\sqrt{2} \leqslant k + \dfrac{1}{2}$.
On pose alors $\alpha = r\sqrt{2} \in \left]0, \sqrt{2}\right[$, et on décompose α en binaire (en base 2) sous la forme

$$= B + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{b_k}{2^k} \text{ où } b_k \in \{0,1\} \text{ et } B = \begin{cases} 0 \text{ si } \alpha < 1 \\ 1 \text{ si } \alpha > 1 \end{cases}$$

L'un au moins des b_k est nul, en effet sinon $\alpha = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = 1 > \frac{1}{\sqrt{2}}$. Soit q le premier indice pour lequel $b_q = 0$, on a,

$$\alpha = B + \sum_{k=1}^{q-1} \frac{1}{2^k} + \frac{0}{2^q} + \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k} = B + 1 - \frac{1}{2^{q-1}} + \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{1}{2^k}$$

$$\begin{aligned} 2^{q-1}\alpha &= 2^{q-1}B + 2^{q-1} - 1 + \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{b_k}{2^{k-q}} = 2^{q-1}(B+1) - 1 + \beta \\ \text{où } \beta &= \sum_{k=q+1}^{+\infty} \frac{b_k}{2^{k-q}} \leqslant \sum_{k=i+1}^{+\infty} \frac{1}{2^{k-q}} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

On a donc trouvé deux entiers $q \geqslant 1$ et $k = 2^{q-1}(B+1) - 1$ tels que

$$k < 2^q \frac{r}{\sqrt{2}} < k + \frac{1}{2} < k + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Ainsi $m = 2^q n - k = 2^q n - 2^{q-1}(B+1) + 1 = 2^{q-1}(2n - B) + 1 - 2^{q-1}$ est une autre solution. Pour finir, on a

$$m = 2^{q-1}(2n - B) + 1 - 2^{q-1} \geqslant 2^{q-1}(2n-1) + 1 - 2^{q-1} = 2^q(n-1) + 1 \geqslant 2(n-1) + 1 \geqslant n$$

On a donc construit une suite strictement croissante de solution.

2.3.1 Mise en oeuvre

- La première solution est $n=1$, on calcule $\alpha=\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt{2}=0,585\,79<1$ qui s'écrit en binaire $\alpha=0,1001\cdots$. On a $B=0$ et le premier 0 est en position 2, ainsi $q=2$ et la solution suivante est $2^{2-1}\left(2-0\right)+1-2^{2-1}=3$. On a perdu la solution $n=2$.
- Avec $n=2$, on calcule $\alpha=\left(2\sqrt{2}-\left\lfloor 2\sqrt{2}\right\rfloor\right)\sqrt{2}=2\sqrt{2}\left(\sqrt{2}-1\right)>1$ qui s'écrit en binaire $\alpha=1,001\cdots$. (décalage à gauche du précédent). On a $B=1$ et le premier 0 est en position 1, ainsi $q=1$ et la solution fabriquée à partir de $n=2$ est $2^{1-1}\left(4-1\right)+1-2^{1-1}=3$.
- Avec $n=91$, on calcule $\alpha=\left(91\sqrt{2}-\left\lfloor 91\sqrt{2}\right\rfloor\right)\sqrt{2}=182-128\sqrt{2}=0,980\,6\cdots$ qui s'écrit en binaire $\alpha=0,1111101\cdots$. On a $B=0$ et le premier 0 est en position 6, ainsi $q=6$ et la solution fabriquée à partir de $n=91$ est $2^{6-1}\left(2\times 91-0\right)+1-2^{6-1}=5793$.

2.3.2 Un résultat plus fort

En remplaçant $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ par $\dfrac{1}{2}$, on a trouvé une condition suffisante mais pas nécessaire. Cela explique que l'on perd des solutions. En réalité, on a démontré un résultat plus fort, à savoir

L'ensemble des entiers $n\in\mathbb{N}$ tels qu'il existe $p\in\mathbb{N}$ vérifiant $\quad 0\leqslant n\sqrt{2}-2^{p}\leqslant\dfrac{1}{\sqrt{2}}\quad$ est infini.

2.4 Un peu plus fort

Si l'on revient sur ce qui a été fait, on comprend que la condition

$$k<2^{q-1}\alpha<k+\frac{1}{\sqrt{2}}$$

est réalisée dès que $2^{q-1}\alpha$ a son premier chiffre après la virgule en binaire égal à 0. Ce qui revient à dire que $\left\lfloor 2^{q}\alpha\right\rfloor$ est pair (ou est égal à 0 modulo 2). Dans ce cas $2^{q}-\left\lfloor 2^{q-1}\alpha\right\rfloor$ est une solution du problème
Si l'on part de la solution $n=1$, on a $r=\sqrt{2}-1$, $\alpha=2-\sqrt{2}$,

$$\left\lfloor 2^{q}\alpha\right\rfloor=\left\lfloor 2^{q+1}-2^{q}\sqrt{2}\right\rfloor=2^{q+1}+\left\lfloor -2^{q}\sqrt{2}\right\rfloor=2^{q+1}-1-\left\lfloor 2^{q}\sqrt{2}\right\rfloor \text{ car } 2^{q}\sqrt{2}\notin\mathbb{Z}$$

Ainsi $\left\lfloor 2^{q}\alpha\right\rfloor$ a la parité opposée à celle de $\left\lfloor 2^{q}\sqrt{2}\right\rfloor$.
On obtient donc une solution au problème lorsque $\left\lfloor 2^{q}\sqrt{2}\right\rfloor$ est impair, cette solution est alors

$$2^{q}-\left\lfloor 2^{q-1}r\sqrt{2}\right\rfloor=2^{q}-\left(2^{q}-1-\left\lfloor 2^{q-1}\sqrt{2}\right\rfloor\right)=1+\left\lfloor 2^{q-1}\sqrt{2}\right\rfloor$$

Puisque $\alpha=2-\sqrt{2}$ est un irrationnel, son développement en base 2 contient une infinité de 0. On a donc une infinité de solutions !

Voici un programme Maple qui détermine ses solutions :

```
> Digits:=30;alpha:=2-sqrt(2);
                                   Digits := 30
                                   α := 2 - √2
> for q from 1 to 40 do
  if (floor(2^(q)*sqrt(2)) mod 2=1) then
  print(1+floor(2^(q-1)*sqrt(2))); fi; od:
                                        3
                                        6
                                       23
                                       91
                                      5793
                                     46341
                                     92682
                                     185364
                                     370728
                                    2965821
                                    5931642
                                    47453133
                                    94906266
                                   759250125
                                   1518500250
                                   3037000500
                                   6074001000
                                  12148002000
                                  24296004000
                                  48592008000
                                  388736063997
                                  777472127994
>
```

2.5 Programmation effective

L'étude précédente permet de prouver qu'il y a bien une infinité de valeur de n telles que $\lfloor n\sqrt{2}\rfloor$ soit une puissance de 2. En fait, on a vu que partant d'une solution n, on en détermine une plus grande en trouvant $q \geqslant 1$ et k tels que

$$k < 2^q \frac{r}{\sqrt{2}} < k + \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Il suffit donc de chercher le premier entier $q \geqslant 1$ tels que $2^q\dfrac{r}{\sqrt{2}} - \left\lfloor 2^q\dfrac{r}{\sqrt{2}}\right\rfloor < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, ce qui se programme facilement

```
Untitled (2) - [Server 1]
> suivant:=proc(m)
  local r,q;
  r:=m*sqrt(2)-floor(m*sqrt(2));
  for q from 1 while evalf(2^q*r/sqrt(2)-floor(2^q*r/sqrt(2))-1/sqrt(2))>0
   do
   od;
  m*2^(q)-floor(2^(q)*r/sqrt(2));
  end;
suivant := proc(m)
local r, q;
   r := m*sqrt(2) - floor(m*sqrt(2));
   for q while 0 < evalf(2^q*r / sqrt(2) - floor(2^q*r / sqrt(2)) - 1 / sqrt(2)) do  end do;
   m*2^q - floor(2^q*r / sqrt(2))
end proc
> liste:=proc(n) local depart,i,l;
  depart:=1;
  l:=1;
  for i from 1 to n do
  depart:=suivant(depart);
  l:=l,depart;
  od;
  l;
  end;
     liste := proc(n) local depart, i, l; depart := 1; l := 1; for i to n do depart := suivant(depart); l := l, depart end do; l end proc
> liste(20);
1, 2, 3, 6, 12, 23, 91, 2897, 5793, 23171, 46341, 92682, 185364, 370728, 1482911, 2965821, 5931642, 23726567, 47453133,
  94906266, 379625063
>
```

On constate que l'on semble récupérer toutes les solutions, mais cela n'est pas prouvé.

2.6 Origine du problème

Ce problème a été proposé par la Roumanie aux olympiades internationales (voir [1] et [2]) de mathématiques, mais n'a pas été retenu pour la compétition. Il a ensuite été proposé dans le Crux Mathematicorum et résolu par Ed DOOLITLE. On le retrouve dans [4] et [5] où la solution de Ed DOOLITLE est reproduite. Le lecteur pourra la consulter avec intérêt.

3 Généralisations possibles

3.0.1 Deux généralisations

On peut généraliser le problème ainsi : Soient $(a,d) \in \mathbb{N}^2$, a et d au moins égaux à 2 et tel que $\sqrt{d} \notin \mathbb{Q}$, déterminer s'il y a une infinité de puissances de a où $a \geqslant 2$ dans la suite $\left(\left\lfloor n\sqrt{d}\right\rfloor\right)_{n\geqslant 0}$. Si on a une solution n telle que $n\sqrt{d} = a^p + r$, où $p \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [0,1[$, on cherche alors $q \geqslant 1$ et k tels que

$$0 < a^q r - k\sqrt{d} < 1 \Longleftrightarrow k < a^{q-1}\frac{ar}{\sqrt{d}} < k + \frac{1}{\sqrt{d}}$$

On écrit alors $\dfrac{ar}{\sqrt{d}} = B + [0, b_1 b_2 \cdots]_a$ où $B = \left\lfloor \dfrac{ar}{\sqrt{d}} \right\rfloor \in \mathbb{N}$ et où $[0, b_1 b_2 \cdots]_a$ est la décomposition en base a de $\dfrac{ar}{\sqrt{d}} - B$. Si tous les b_i valent $a-1$ alors $\dfrac{ar}{\sqrt{d}} = B+1$ et

$$n\sqrt{d} = a^p + \frac{B+1}{a}\sqrt{d} \Longrightarrow \sqrt{d} \in \mathbb{Q}$$

Soit q le premier indice pour lequel $b_q \leqslant a-2$, en multipliant par a^{q-1}, on obtient

$$a^q \frac{r}{\sqrt{d}} = k + [0, b_q b_{q+1} \cdots]_a$$

Or $[0, b_q b_{q+1} \cdots]_a \leqslant 1 - \dfrac{1}{a} = \dfrac{a-1}{a}$. On peut donc, à partir d'une solution, en construire une infinité de solution si $1 - \dfrac{1}{a} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{d}}$. Mais ceci se produit rarement. En effet $d \geqslant 2$ donc $1 - \dfrac{1}{a} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{d}} \Longrightarrow 1 - \dfrac{1}{a} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Longrightarrow a < \sqrt{2} + 2$. Ainsi $a = 2$ ou 3 et on obtient uniquement les couples $(a, d) = (2, 2), (2, 3), (3, 2)$ qui vérifient $1 - \dfrac{1}{a} \leqslant \dfrac{1}{\sqrt{d}}$.
Puisque que $\lfloor 7\sqrt{2} \rfloor = 9$ et $\lfloor 5\sqrt{3} \rfloor = 8$, on a prouvé que

La suite $\lfloor n\sqrt{2} \rfloor$ contient une infinité de puissances de 2 et de 3

La suite $\lfloor n\sqrt{3} \rfloor$ contient une infinité de puissances de 2

3.0.2 Sur l'équirépartition

Si on dispose d'un entier n tel que $n\sqrt{d}$ soit une puissance de a, on a vu que l'on peut fabriquer une autre solution si on trouve $q \geqslant 1$ et k entiers tels que
$$k < a^{q-1} \frac{ar}{\sqrt{d}} < k + \frac{1}{\sqrt{d}}$$
Si on pose $\alpha = \dfrac{ar}{\sqrt{d}}$, cela revient à trouver $q \geqslant 1$ tel que $a^{q-1}\alpha \bmod 1$ soit dans l'intervalle $\left[0, \dfrac{1}{\sqrt{d}}\right]$. Or on dispose du théorème suivant :

Théorème 1 *Soit $(u_n)_n$ une suite de nombres entiers naturels distincts deux à deux. Pour presque tout nombre réel α la suite $(\alpha u_n)_n$ est équirépartie modulo* 1.

Avec $u_n = a^{n-1}$, on peut donc "espérer" que la suite $\left(a^{q-1}\alpha - \lfloor a^{q-1}\alpha \rfloor\right)$ est dense dans $[0, 1]$ (conséquence de l'équirépartition modulo 1) et ainsi construire une autre solution.

Références

[OEIS] The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences® (OEIS®), http ://oeis.org/

[1] Art Of Problem Solving : http ://www.artofproblemsolving.com

[2] http ://www.cs.elte.hu/~nagyzoli/compendium.pdf

[3] Crux Mathematicorum 1988, 70,71

[4] From Erdös to Kiev : Problems of Olympiad Caliber, Volume 17, publié par Ross Honsberger

[5] 1001 problèmes en théorie classique des nombres, Jean-Marie de Koninck