A propos d'un exercice d'arithmétique de l'oral du Capes externe 2006

G.Huvent-M.Gouy

9 octobre 2006

1 Avant propos

L'objet de ce document est de montrer comment, à l'aide d'un exercice d'arithmétique élémentaire, présenté comme un problème ouvert, on peut à partir d'une étude expérimentale, mettre en évidence différents types de raisonnements (par l'absurde, par récurrence, par minimalité $\cdots$).
L'étude expérimentale préalable a un double objectif. Dans un premier temps, on peut considérer que la programmation du problème est déjà un objectif. L'usage de la calculatrice ou tableur, pouvant faire l'objet d'une séance. Dans un second temps, cette étude permet à chacun de ne pas rester "sans idée" devant un problème, a priori, ouvert.

2 Une fonction arithmétique de deux variables

On considère la fonction arithmétique f à deux variables, définie sur $\mathbb{N}^{*2}$ par

$$f(m,n) = \frac{m+n}{\operatorname{pgcd}(m,n)}$$

et A un ensemble stable par f. (i.e. tel que si $(m,n) \in A$ alors $f(m,n) \in A$), que peut-on dire de A ?

Afin de répondre à cette question, on commence par étudier sur des exemples simples, le comportement de f. On peut utiliser, au choix, une calculatrice, un tableur, ou un logiciel de calcul formel.
Voici ce qu'un tableur donne comme résultats[1] :

m\n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
2	**3**	2	**5**	3	**7**	4	**9**	5	**11**	6	**13**	7
3	4	5	2	7	8	3	10	11	4	13	14	5
4	5	3	7	2	9	5	11	3	13	7	15	4
5	6	7	8	9	2	11	12	13	14	3	16	17
6	7	4	3	5	11	2	13	7	5	8	17	3
7	8	9	10	11	12	13	2	15	16	17	18	19
8	9	5	11	3	13	7	15	2	17	9	19	5
9	10	11	4	13	14	5	16	17	2	19	20	7
10	11	6	13	7	3	8	17	9	19	2	21	11
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	2	23
12	13	7	5	4	17	3	19	5	7	11	23	2

[1] Il n'est pas détaillé dans ce document la manière de réaliser ce tableau.

2.1 Analyse des résultats

On peut constater que

- Le tableau est symétrique par rapport à la diagonale (ce qui n'est pas surprenant car $f(m,n) = f(n,m)$)
- Sur la diagonale, on retrouve toujours l'entier 2. Ce résultat découle de

$$f(m,m) = \frac{2m}{\text{pgcd}(m,m)} = \frac{2m}{m} = 2$$

  On en déduit que

$$2 \in A$$

- Puisque $2 \in A$,La seconde ligne nous permet de conjecturer que si A contient un entier impair q, alors A contient tous les impairs suivants.
- La seconde colonne donne un résultat plus subtil. Si A contient un autre nombre pair p, alors il contient un autre entier plus petit que p.

2.2 L'énoncé du sujet du Capes[2]

Capes Externe 2006

On se donne une partie A de $\mathbb{N}^*$, finie et non vide. On suppose que pour tous éléments m et n de A, l'entier $\dfrac{m+n}{\text{pgcd}(m,m)}$ est encore dans A.

1. Montrer que l'entier 2 est élément de A.
2. Montrer que l'ensemble fini A ne contient que des entiers pairs.
3. Montrer que l'ensemble A se réduit au singleton $\{2\}$.

2.3 Solution

On a vu que l'entier 2 est dans A, car A est non vide, il contient au moins un élément m et alors $f(m,m) = 2$ est dans A. On raisonne ensuite par l'absurde, en supposant que A contient un entier impair q. Mais alors

$$f(2,q) = \frac{2+q}{\text{pgcd}(2,q)} = q+2 \in A$$

car 2 et q (qui est impair) sont premiers entre eux. On vient donc de prouver l'hérédité d'un raisonnement par récurrence ! On obtient facilement, par récurrence, l'appartenance de tous les entiers impairs supérieurs à q à A. Ceci contredit le caractère fini de A.

Il reste à prouver que A est réduit au singleton $\{2\}$. Il s'agit encore d'un raisonnement par l'aburde. S'il n'en est pas ainsi, soit n le plus petit entier de $A \diagdown \{2\}$, n est pair, il existe donc $p \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2p$. Ainsi

$$f(2,p) = \frac{2+2p}{\text{pgcd}(2,2p)} = \frac{2+2p}{2} = p+1 \in A$$

mais

$$p+1 < 2p \Longleftrightarrow p > 1 \Longleftrightarrow n > 2 \text{ ce qui est vrai car } n \neq 2$$

On a donc trouvé un autre élément de A plus petit que n, par minimalité de n, on a

$$p+1 = 2 \text{ donc } p = 1 \text{ et } n = 2 \text{ ce qui est contraire à l'hypothèse.}$$

Pour conclure, A est bien réduit au singleton $\{2\}$.

[2] http ://www.capes.math.jussieu.fr/2005/Sujets donnés_06/Sujet_du_19_07.pdf

3 Complément

Que se passe-t-il si A contient un entier impair ?

Si cet entier vaut 1 alors dès que A contient un entier m, de l'égalité

$$f(m,1) = \frac{m+1}{1} = m+1$$

on déduit qu'il contient son suivant. Ainsi par récurrence, $A = \mathbb{N}^*$.
On suppose maintenant que cet entier ne vaut pas 1. On a montré que si A contient l'entier $n = 2p+1$ alors il contient tous les entiers impairs plus grands que n. En particulier, A contient alors l'entier impair $m = 3n$. Mais alors

$$f(m,n) = \frac{n+3n}{n} = 4 \in A$$

Puis, on a vu que $2 \in A$, donc

$$f(2,4) = 3 \in A$$

On en déduit que A contient tous les entiers plus grand que 3. On peut donc affirmer que si A contient un entier impair différent de 1, il contient tous les entiers impairs sauf 1.

On montre maintenant que A contient également tous les entiers pairs. L'ensemble A contient tous les entiers impairs plus grands que 3, donc A contient les entiers $m = 3$ et $n = 3 \times (2q+1)$ pour $q \geq 0$, ainsi

$$f(m,n) = \frac{3 + 3 \times (2q+1)}{3} = 2(q+1) \in A$$

ce qui prouve que tous les entiers pairs sont dans A.

Conclusion : Si A contient l'entier 1, alors $A = \mathbb{N}^*$, si A contient un entier impair différent de 1 alors $A = \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.