# Une intégrale sur un chemin et des séries...

G.Huvent

10 février 2002

**Résumé**

Le calcul sur un chemin précis d'un intégrale conduit aux formes closes de certaines séries et intégrales. On retrouve ainsi, entre autres, la formule de Comtet $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4 C_{2n}^n} = \frac{17\pi^4}{3240}$

## 1 Un calcul d'intégrale

Considérons, pour $p$ et $q$ entiers $q \geq 1$, la fonction

$$\begin{aligned} f_{p,q} &= \frac{\ln^p z \ln^q (1-z)}{z} \\ f_{p,q}(1) &= 0 \end{aligned}$$

cette fonction est holomorphe sur $\mathbb{C} \backslash ]1,+\infty[$ lorsque $p=0$ et $\mathbb{C}$ privé de $]1,+\infty[$ et de $]-\infty,0]$ lorsque $p \geq 1$. Considérons, pour $x \in [-\pi,\pi]$ le chemin $\gamma(t) = e^{it},\ t \in [0,x]$ et l'intégrale $\int_\gamma f_{p,q}(z)\,dz$ (avec $x \neq \pm\pi$ si $p \neq 0$). Puisque $\ln\left(1-e^{it}\right) = \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) - \frac{i}{2}(\pi - t)$, on a

$$\int_\gamma f_{p,q}(z)\,dz = i^p \int_0^x t^p \left(\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) - \frac{i}{2}(\pi-t)\right)^q dt$$

Si $F_{p,q}$ désigne une primitive de $f_{p,q}$ sur un domaine contenant le chemin $\gamma$, on a

$$i^p \int_0^x t^p \left(\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) - \frac{i}{2}(\pi-t)\right)^q dt = F_{p,q}\left(e^{ix}\right) - F_{p,q}(1)$$

Le problème se ramène donc à un calcul de primitive !
La primitive de $f_{p,1}$ nulle en $z=1$ est

$$F_{p,1}(z) = (-1)^p\, p!\,\zeta(p+2) + \sum_{k=0}^{p} (-1)^{k+1} \frac{p!}{(p-k)!} \ln^{p-k}(z)\, L_{k+2}(z)$$

Ainsi

$$i^{p+1} \int_0^x t^p \left(\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) - \frac{i}{2}(\pi-t)\right) dt = (-1)^p\, p!\,\zeta(p+2) + \sum_{k=0}^{p} (-1)^{k+1} \frac{p!}{(p-k)!} L_{k+2}\left(e^{ix}\right)(ix)^{p-k}$$

soit

$$\int_0^x t^p \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt = \frac{i}{2}\left(\frac{\pi x^{p+1}}{p+1} - \frac{x^{p+2}}{p+2}\right) + i^{-p-1}\left((-1)^p\, p!\zeta(p+2) + \sum_{k=0}^{p} (-1)^{k+1} \frac{(ix)^{p-k}\, p!}{(p-k)!} L_{k+2}\left(e^{ix}\right)\right)$$

On obtient donc une seconde expression de $\int_0^x t^p \ln(\sin t)\, dt$, en comparant avec celle déjà obtenu, pour $p = 0, 1, 2...$, on retrouve simplement la valeur de $L_n\left(e^{i\theta}\right) + (-1)^n L_n\left(e^{-i\theta}\right)$. Cela n'a rien de nouveau, car on connaît le développement en séries de Fourier du énième polynôme de Bernoulli. Ce développement donne l'égalité

$$L_n\left(e^{i\theta}\right) + (-1)^n L_n\left(e^{-i\theta}\right) = -\frac{(2i\pi)^n}{n!} B_n\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)$$

La primitive de $f_{0,q}$ qui est nulle en $z = 1$ est

$$\sum_{k=0}^{p} (-1)^{k+1} \frac{p!}{(p-k)!} \ln^{p-k}(1-z)\, L_{k+1}(1-z)$$

ainsi

$$\int_0^x \left(\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) - \frac{i}{2}(\pi - t)\right)^p dt = -i\sum_{k=0}^{p} (-1)^{k+1} \frac{p!}{(p-k)!} \ln^{p-k}\left(1 - e^{ix}\right) L_{k+1}\left(1 - e^{ix}\right)$$

En particulier,

$$\begin{aligned}\int_0^x \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt &= \frac{i}{2}\int_0^x (\pi - t)\, dt - \frac{i\pi^2}{6} + iL_2\left(e^{ix}\right) \\ &= i\left(L_2\left(e^{ix}\right) + \frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}\pi^2\right)\end{aligned}$$

On peut ainsi retrouver que $\Re\left(L_2\left(e^{ix}\right)\right) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2}\pi x + \frac{1}{6}\pi^2$ et que

$$\int_0^x \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt = -\Im\left(L_2\left(e^{ix}\right)\right)$$

En particulier avec $x = \frac{\pi}{2}$, on obtient la représentation intégrale

$$G = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt$$

où G est la constante de Catalan.

**Remarque 1** *Le changement de variable* $u = \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ *conduit à*

$$G = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt = -2\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\ln 2u}{\sqrt{1-u^2}}\, du$$

*Avec le DSE usuel de* $\frac{1}{\sqrt{1-u^2}}$, *on obtient (après quelques calculs et manipulations)*

$$G = -\frac{\sqrt{2}\ln 2}{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C_{2k}^{k}}{(2k+1)\, 8^k} + \sqrt{2}\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C_{2k}^{k}}{(2k+1)^2\, 8^k}$$

*Puisque (DSE usuel de l'arcsin)*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C_{2k}^{k}}{(2k+1)\,8^{k}} = \frac{\pi\sqrt{2}}{4}$$

*on retrouve la valeur de la somme*

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C_{2k}^{k}}{(2k+1)^{2}\,8^{k}} = \frac{\pi\sqrt{2}\ln 2}{8} + \frac{G\sqrt{2}}{2}$$

On a également

$$-\int_0^x t\left(\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) - \frac{i}{2}(\pi - t)\right) dt = L_3\left(e^{ix}\right) - ixL_2\left(e^{ix}\right) - \zeta(3)$$

d'où

$$\int_0^x t\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt = -L_3\left(e^{ix}\right) + ixL_2\left(e^{ix}\right) + \zeta(3) - i\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}\pi x^2\right)$$

Puis

$$\int_0^x \left(\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) + \frac{i}{2}(\pi - t)\right) dt = \ln(1-t)\ln t + L_2(1-t) - \frac{\pi^2}{6}$$

ce qui permet de retrouver la formule d'Euler pour le dilogarithme.
Enfin

$$\begin{aligned}
\int_0^x \left(\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) - \frac{i}{2}(\pi - t)\right)^2 dt &= \int_0^x \ln^2\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt + i\int_0^x t\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt \\
&\quad -i\pi\int_0^x \ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt - \frac{1}{4}\int_0^x (\pi - t)^2\, dt \\
&= \int_0^x \ln^2\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt + i\left(-L_3\left(e^{ix}\right) + ixL_2\left(e^{ix}\right) + \zeta(3) - i\left(\frac{1}{6}x^3 - \frac{1}{4}\pi x^2\right)\right) \\
&\quad -i\pi\left(i\left(L_2\left(e^{ix}\right) + \frac{1}{2}\pi x - \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{6}\pi^2\right)\right) - \frac{1}{4}\pi^2 x + \frac{1}{4}\pi x^2 - \frac{1}{12}x^3 \\
&= x\ln^2\left(1 - e^{ix}\right) - 2i\ln\left(1 - e^{ix}\right) L_2\left(1 - e^{ix}\right) + 2iL_3\left(1 - e^{ix}\right)
\end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned}
\int_0^x \ln^2\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt &= iL_3\left(e^{ix}\right) + (x - \pi)\, L_2\left(e^{ix}\right) + 2iL_3\left(1 - e^{ix}\right) \\
&\quad -i\zeta(3) + x\ln^2\left(1 - e^{ix}\right) - 2i\ln\left(1 - e^{ix}\right) L_2\left(1 - e^{ix}\right) \\
&\quad +\frac{1}{12}(2\pi - x)(x^2 - \pi x + \pi^2)
\end{aligned}$$

**Remarque 2** *On peut simplifier cette égalité avec les formules de Landen et retrouver le résultat classique*

$$\int_0^\pi \ln^2\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt = \frac{\pi^3}{12}$$

*résultat que l'on obtient avec le développement en séries de Fourier de* $\ln\left|2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\right|$ *et la formule de Parseval.*

En particulier

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} \ln^2\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt = \frac{7}{108}\pi^3 \qquad \text{(Gourevitch)}$$

car

$$L_3\left(e^{\frac{i\pi}{3}}\right) = \frac{1}{3}\zeta(3) + \frac{5}{162}i\pi^3$$

Cette égalité donne alors avec $u = \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ et un DSE

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{C_{2n}^n}{16^n (2n+1)^3} = \frac{7}{216}\pi^3 \qquad \text{(Gourevitch)}$$

On peut également établir que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln^2\left(2\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right) dt = 2\Im\left(L_3\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\right) + \frac{23}{192}\pi^3 + \frac{\pi\ln^2 2}{16} - G\ln(2) \qquad (1)$$

On peut aussi calculer la primitive de $\frac{\ln(z)\ln^2(1-z)}{z} = f_{1,2}(z)$, on trouve

$$\begin{aligned}
F_{1,2}(x) &= -\frac{1}{4}\ln^4(1-t) + \ln^3(1-t)\ln(t) - \frac{1}{2}\ln^2(1-t)\ln^2(t) + \ln^2(1-t)L_2(1-t) - \ln^2(t)L_2(t) \\
&\quad -\ln^2\left(\frac{t}{1-t}\right)L_2\left(\frac{t}{t-1}\right) + 2\ln\left(\frac{t}{1-t}\right)L_3\left(\frac{t}{t-1}\right) - 2\ln(1-t)L_3(1-t) \\
&\quad +2\ln(t)L_3(t) + 2L_4(1-t) - 2L_4(t) - 2L_4\left(\frac{t}{t-1}\right) - \frac{\pi^4}{45} \\
\text{et } F_{1,2}(0) &= 0
\end{aligned}$$

Cette égalité admet plusieurs applications :

L'égalité

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(z)\ln^2(1-z)}{z} dz = \frac{1}{4}\ln^4 2 - \frac{\pi^4}{360}$$

Puis avec

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^2(1-t)\ln(t)}{t} dt - \int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln^2(1-t)\ln(t)}{t} dt = \frac{1}{2}\ln^4(2)$$

obtenue par IPP et changement de variables $(u = 1-t)$, car $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{\ln^2(1-t)\ln(t)}{t} = -\frac{1}{2}\ln^4 2 - \int_{\frac{1}{2}}^1 \left(-\frac{\ln(1-t)}{1-t}\ln^2 t\right) dt$.
On a

$$\int_0^1 \frac{\ln(z)\ln^2(1-z)}{z} dz = -\frac{\pi^4}{180}$$

qui donne

$$\lim_{t\to 1} F_{1,2}(t) = -\frac{\pi^4}{180}$$

Enfin, en partant de

$$\int_\gamma f_{1,2}(z)\, dz = i\int_0^x t\left(\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) - \frac{i}{2}(\pi - t)\right)^2 dt$$

que l'on développe comme dans l'exemple précédent, on trouve

Avec $x = \frac{\pi}{3}$,et compte tenu de la valeur de $L_3\left(e^{-\frac{i\pi}{3}}\right)$

$$F_{1,2}\left(e^{i\frac{\pi}{3}}\right) = \frac{2\pi^2}{9}L_2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) - 2L_4\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) + \frac{77}{4860}\pi^4 + \frac{8i\pi\zeta(3)}{9}$$

ce qui donne

$$i\int_0^{\frac{\pi}{3}} t\left(\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) - \frac{i}{2}(\pi - t)\right)^2 dt = \frac{2\pi^2}{9}L_2\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) - 2L_4\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{2}\right) - \frac{\pi^4}{486} + \frac{8i\pi\zeta(3)}{9}$$

En développant le carré sous l'intégrale et en tenant compte des valeurs précédemment calculées de $\int_0^{\frac{\pi}{3}} t\ln\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt$, il s'avère (Oh miracle) que l'on obtient

$$\int_0^{\frac{\pi}{3}} t\ln^2\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt = \frac{17\pi^4}{6480} \qquad \text{(Comtet)}$$

Cette dernière égalité, donne avec $u = \sin\left(\frac{t}{2}\right)$ et le DSE de $\frac{\arcsin(u)}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{d}{du}\arcsin^2(u)$ ,l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^4 C_{2n}^n} = \frac{17\pi^4}{3240}$$

Avec $x = \frac{\pi}{2}$, le résultat est moins simple, cependant, on a

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} t\ln^2\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt &= \frac{5}{96}\ln^4(2) - \frac{\pi^2\ln^2(2)}{48} + \frac{5}{4}L_4\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{19}{1152}\pi^4 \\ &\quad + \pi\Im\left(L_3\left(\frac{1}{2} - \frac{i}{2}\right)\right) + \frac{35}{32}\ln(2)\zeta(3) - \frac{\pi\ln(2)G}{2}\end{aligned}$$

En combinant avec 1, on a

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\frac{\pi}{2} - t\right)\ln^2\left(2\sin\frac{t}{2}\right) dt = \frac{25}{576}\pi^4 + \frac{5}{96}\ln^2(2)\pi^2 - \frac{5}{96}\ln^4(2) - \frac{35}{32}\ln(2)\zeta(3) - \frac{5}{4}L_4\left(\frac{1}{2}\right)$$