Autour de la primitive de $t^p \coth\left(\frac{\alpha t}{2}\right)$.

G.Huvent

3 février 2002

Résumé

Après une brève introduction aux polylogarithmes, le calcul de la primitive de $t^p \coth\left(\frac{\alpha t}{2}\right)$conduit à des développements en séries intéressants et à des relations sur les nombres de Bernoulli.

1 Introduction aux polylogarithmes

Pour $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$ et $n \in \mathbb{N}$, on définit le polylogarithme d'ordre n par

$$L_n(z) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{z^k}{k^n}$$

Ainsi

$$\begin{aligned} L_0(z) &= -\frac{z}{z-1} \\ L_1(z) &= -\ln(1-z) \end{aligned}$$

Pour $n \geq 2$, signalons que la convergence est normale sur le disque unité fermé.
On dispose de la représentation intégrale suivante

$$\int_0^1 \frac{\ln^n(y)}{y - \frac{1}{z}} dy = (-1)^{n+1} n! L_{n+1}(z) \tag{1}$$

qui permet de prolonger le polylogarithme, pour $n \geq 2$, sur $\mathbb{C} \backslash]1, +\infty[$en une fonction holomorphe.
Les polylogarithmes peuvent également être définis par des intégrations successives, en effet

$$\frac{dL_n(z)}{dz} = \frac{L_{n-1}(z)}{z}$$

ainsi

$$L_n(z) = \int_0^z \frac{L_{n-1}(t)}{t} dt$$

et par exemple

$$L_2(z) = -\int_0^z \frac{\ln(1-t)}{t} dt = \int_0^z \int_0^t \frac{1}{t} \frac{1}{1-u} du dt \tag{2}$$

1.1 Valeurs remarquables

Les premières valeurs remarquables sont, pour $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} L_n(1) &= \zeta(n) \\ L_n(-1) &= \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)\zeta(n) \end{aligned}$$

où ζ est la fonction zéta de Riemann.
En particulier

$$L_2(1) = \frac{\pi^2}{6} \text{ et } L_2(-1) = -\frac{\pi^2}{12}$$

Pour $n \geq 1$,

$$\begin{aligned} L_n(i) &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{i^k}{k^n} = \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{k^n} + i\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^n} \\ &= \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)\zeta(n) + i\beta(n) \end{aligned}$$

où $\beta(n) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^n}$
En particulier

$$\begin{aligned} L_2(i) &= -\frac{\pi^2}{48} + iG \\ \text{où } G &= \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \text{ est la constante de Catalan} \\ L_3(i) &= -\frac{3\zeta(3)}{32} + i\pi^3 \end{aligned}$$

Remarque 1 *On connaît la valeur exacte de* $\zeta(2n)$ *et de* $\beta(2n+1)$.

1.2 Formule de duplication

On a sur $\mathbb{C}\backslash]1,+\infty[$, $\int_0^1 \frac{\ln^n(y)}{y-\frac{1}{z}}dy + \int_0^1 \frac{\ln^n(y)}{y+\frac{1}{z}}dy = \int_0^1 \ln^n(y)\left(\frac{1}{y-\frac{1}{z}} + \frac{1}{y+\frac{1}{z}}\right)dy = \int_0^1 \ln^n(y)\left(\frac{2y}{y^2-\frac{1}{z^2}}\right)dy \underset{u=y^2}{=} \frac{1}{2^n}\int_0^1 \frac{\ln^n(u)}{u-\frac{1}{z^2}}du$. Ce qui prouve la formule de duplication, lorsque les trois termes ont un sens.

$$L_n(z) + L_n(-z) = \frac{1}{2^{n-1}}L_n\left(z^2\right)$$

2 Formules d'Euler et de Landen pour le dilogarithme

2.1 Formule d'Euler

Sur $]-1,1[$, on a

$$L_n'(x) = \frac{L_{n-1}(x)}{x}$$

Cette égalité permet de prouver par dérivation l'identité d'Euler pour le dilogarithme

$$\forall x \in \left]0,1\right[,\ \mathrm{L}_2(x) + \mathrm{L}_2(1-x) = \zeta(2) - \ln(1-x)\ln(x) \tag{3}$$

En particulier avec $x = \dfrac{1}{2}$, on obtient le résultat suivant, établie par Euler

$$\mathrm{L}_2\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n n^2} = \frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\ln^2(2)$$

2.2 Formules de Landen

On dispose également de la relation suivante dite "identité de Landen" (que l'on prouve par dérivation)

$$\forall x \in \left[-1,\frac{1}{2}\right],\ \mathrm{L}_2(x) + \mathrm{L}_2\left(\frac{x}{x-1}\right) = -\frac{1}{2}\ln^2(1-x) \tag{4}$$

Cette identité se prolonge sur $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \cup \left[-1,\frac{1}{2}\right]$

2.2.1 Valeurs particulières

Avec $x = \dfrac{1}{\phi^2}$ où $\phi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$ est le nombre d'or (qui vérifie $\phi^2 + \phi = 1$), on obtient

$$\mathrm{L}_2\left(\frac{1}{\phi^2}\right) + \mathrm{L}_2\left(-\frac{1}{\phi}\right) = -\frac{1}{2}\ln^2\left(\frac{1}{\phi}\right) = -\frac{1}{2}\ln^2(\phi)$$

Mais la formule d'Euler fournit

$$\mathrm{L}_2\left(\frac{1}{\phi^2}\right) + \mathrm{L}_2\left(\frac{1}{\phi}\right) = \zeta(2) - 2\ln^2(\phi)$$

et la formule de duplication

$$\mathrm{L}_2\left(\frac{1}{\phi}\right) + \mathrm{L}_2\left(-\frac{1}{\phi}\right) = \frac{1}{2}\mathrm{L}_2\left(\frac{1}{\phi^2}\right)$$

En combinant les trois résultats, on obtient

$$\begin{aligned} \mathrm{L}_2\left(\frac{1}{\phi^2}\right) &= \frac{2}{5}\zeta(2) - \ln^2(\phi) = \frac{\pi^2}{15} - \ln^2(\phi) \\ \mathrm{L}_2\left(\frac{1}{\phi}\right) &= \frac{\pi^2}{10} - \ln^2(\phi) \end{aligned}$$

2.2.2 Valeurs complexes

L'identité de Landen se prolonge par analycité à $\mathbb{C}\setminus\left]1,+\infty\right[$. Avec $x = i$,on obtient

$$\mathrm{L}_2\left(\frac{1-i}{2}\right) = \frac{5\pi^2}{96} - \frac{1}{8}\ln^2 2 + i\left(\frac{1}{8}\pi\ln(2) - G\right)$$

3 Formule de Landen pour le trilogarithme

$\forall x \in \left]-1, \frac{1}{2}\right]$

$$L_3\left(\frac{x}{x-1}\right) + L_3(x) + L_3(1-x) = \zeta(3) + \zeta(2)\ln(1-x) - \frac{1}{2}\ln(z)^2\ln(1-x) + \frac{1}{6}\ln^3(1-x)$$

Cette formule se déduit des identités d'Euler et de Landen pour le dilogarithme après dérivation.

3.1 Valeurs particulières

On déduit de l'identité de Landen pour le trilogarithme les valeurs remarquables suivantes :

$$L_3\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{8}\zeta(3) - \frac{\pi^2\ln(2)}{12} + \frac{\ln^3(2)}{6} \quad \text{pour } x = \frac{1}{2}$$

$$L_3\left(\frac{1}{\phi^2}\right) = \frac{4}{5}\zeta(3) - \frac{\pi^2\ln(\phi)}{15} + \frac{2\ln^3(\phi)}{3} \quad \text{pour } x = \frac{1}{\phi^2}$$

3.2 Quelques intégrales classiques

La représentation intégrale (1) donne immédiatement

$$\int_0^1 \frac{\ln(u)}{1-u}du \underset{u=1-t}{=} \int_0^1 \frac{\ln(1-t)}{t}dt = \frac{-\pi^2}{6}$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln(u)}{1-u}du = -\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\ln^2(2)$$

La première intégrale est classique, la seconde l'est moins !

De même

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\ln^2(u)}{1-u}du &\underset{t=2u}{=} -\ln^2(2)\int_0^1 \frac{dt}{t-2} + 2\ln(2)\int_0^1 \frac{\ln(t)}{t-\frac{1}{\frac{1}{2}}}dt - \int_0^1 \frac{\ln^2(t)}{t-\frac{1}{\frac{1}{2}}}dt \\
&= \ln^3(2) + 2\ln(2)L_2\left(\frac{1}{2}\right) + 2L_3\left(\frac{1}{2}\right) \\
&= \ln^3(2) + 2\ln(2)\left(\frac{\pi^2}{12} - \frac{1}{2}\ln^2(2)\right) + 2\left(\frac{7}{8}\zeta(3) - \frac{\pi^2\ln(2)}{12} + \frac{\ln^3(2)}{6}\right) \\
&= \frac{1}{3}\ln^3(2) + \frac{7}{4}\zeta(3)
\end{aligned}$$

4 Applications aux calculs de séries et d'intégrales

4.1 Quelques développements en séries entières usuels

On rappelle les développements en séries suivants qui vont nous servir au calculs de certaines séries et intégrales. :

$$\frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{C_{2k}^k}{4^k}x^k$$

$$
\begin{aligned}
z \operatorname{cotan}(z) &= 1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)\,!} z^{2n} = -2\sum_{n=0}^{\infty} \zeta(2n)\left(\frac{z}{\pi}\right)^{2n} \\
\text{où par convention } \zeta(0) &= -\frac{1}{2} \\
z \coth(z) &= 1+\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2n} B_{2n}}{(2n)\,!} z^{2n+p} = -2\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \zeta(2n)\left(\frac{z}{\pi}\right)^{2n} \quad \text{pour } |z| \leq \pi
\end{aligned} \tag{5}
$$

$$
\begin{aligned}
\operatorname{arcsh}(u) &= u+2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n C_{2n}^n}{2n+1}\left(\frac{u}{2}\right)^{2n+1} \quad \text{pour } |u| \leq 1 \\
\arcsin(u) &= u+2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{2n+1}\left(\frac{u}{2}\right)^{2n+1} \quad \text{pour } |u| \leq 1
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\arcsin^2(u)}{u} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{2\,n-1}}{n^2 C_{2n}^n} u^{2\,n-1} \\
\frac{\operatorname{arcsinh}^2(u)}{u} &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}\, 2^{2\,n-1}}{n^2 C_{2n}^n} u^{2\,n-1}
\end{aligned}
$$

Remarque 2 *Les quatre derniers développements donnent alors les séries classiques, avec* $u = 1, \frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}$

$$
\begin{aligned}
\pi &= 2\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{4^n\,(2n+1)} \\
\pi\sqrt{2} &= 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{8^n\,(2n+1)} \\
\pi &= 3\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{16^n\,(2n+1)} \\
\pi\sqrt{3} &= \frac{9}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n C_{2n}^n}{16^n\,(2n+1)}
\end{aligned}
$$

En utilisant

$$
\arcsin\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)+\arcsin\left(\frac{\sqrt{10}}{10}\right) = \frac{\pi}{4}
$$

on peut obtenir, par exemple

$$
\pi\sqrt{10} = 4\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{20^n\,(2n+1)}\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2^n}\right)
$$

le lecteur pourra chercher d'autres relations de ce type.

Avec le développement de $\frac{\arcsin^2(u)}{u}$*, on obtient*

$$\begin{aligned}
\pi^2 &= 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^2 C_{2n}^n} \\
\pi^2 &= 8\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^2 C_{2n}^n} \\
\pi^2 &= \frac{9}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{n^2 C_{2n}^n} \\
\pi^2 &= 18\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2 C_{2n}^n} \quad (\textit{Euler 1748})
\end{aligned}$$

Les valeur $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{5}\right)$ *permettent d'établir les formules*

$$\begin{aligned}
\pi^2 &= 32\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2-\sqrt{2}\right)^n}{n^2 C_{2n}^n} \\
\pi^2 &= 72\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(2-\sqrt{3}\right)^n}{n^2 C_{2n}^n} \quad (\textit{Grandall 1994}) \\
\pi^2 &= 25\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(5-\sqrt{5}\right)^n}{2^{n+1} n^2 C_{2n}^n}
\end{aligned}$$

On peut également écrire que $\arcsin^2(\sqrt{u}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{n^2 C_{2n}^n}u^n$ *ce qui en dérivant donne*

$$\frac{\arcsin\left(\sqrt{u}\right)}{\sqrt{u}\sqrt{1-u}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n-1}}{nC_{2n}^n}u^{n-1}$$

et obtenir d'autres séries comme

$$\begin{aligned}
\pi\sqrt{3} &= 9\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{nC_{2n}^n} \quad (\textit{Comtet 1974}) \\
\pi\sqrt{3} &= \frac{3}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n}{nC_{2n}^n} \\
\pi &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{nC_{2n}^n}
\end{aligned}$$

En calculant de nouveau $u\frac{d}{du}\arcsin^2(\sqrt{u})$*, on a*

$$\pi = -2 + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+1}}{C_{2n}^n}$$

Par itération du procédé, on peut énoncer les conjectures suivantes (je n'ai pas de preuve de ces résultats)

Conjecture 3

$$\forall k \geq 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k 2^n}{C_{2n}^n} = a_k \pi + b_k \ \textit{où}\ \frac{b_k}{a_k} \to \pi$$

Example 4

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^4 2^n}{C_{2n}^n} = 113\pi + 355$$

Conjecture 5

$$\forall k \geq 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^k}{C_{2n}^n} = \alpha_k \pi + \beta_k \ \textit{où}\ \frac{\beta_k}{\alpha_k} \to 2\pi\sqrt{3}$$

Example 6

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^6}{C_{2n}^n} = \frac{13130}{729}\pi\sqrt{3} + 196 \ \textit{et}\ \frac{196}{\frac{13130}{729}} - 2\pi\sqrt{3} = -.000\,541\,81$$

Conjecture 7

$$\forall k \geq 0,\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^k}{C_{2n}^n} = u_k \pi + v_k \ \textit{où}\ \frac{v_k}{u_k} \to \frac{\pi\sqrt{3}}{2}$$

Example 8

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n n^4}{C_{2n}^n} = \frac{32524}{3}\pi\sqrt{3} + 29496 \ \textit{et}\ \frac{29496}{\frac{32524}{3}} - \frac{\pi\sqrt{3}}{2} = -4.87 \times 10^{-7}$$

4.2 Calcul d'une primitive de $t^p \coth\left(\frac{\alpha t}{2}\right)$

Proposition 9 *Soit $\alpha \in \mathbb{C}$, alors*

$$\begin{aligned} \forall p \quad \geq \quad & 1,\ F_p(x) = \int_0^x t^p \coth\left(\frac{\alpha t}{2}\right) dt \\ = \quad & \frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{2p!}{\alpha^{p+1}} \sum_{k=0}^{p} \frac{(\alpha x)^{p-k}}{(p-k)!} L_{k+1}\left(e^{-\alpha x}\right) + \frac{2p!}{\alpha^{p+1}} \zeta(p+1) \end{aligned} \tag{6}$$

L'égalité précédente est valable sur $\mathbb{R}$ si $\alpha \notin i\mathbb{R}$ et $\alpha \notin \mathbb{R}$
Si $\alpha \in \mathbb{R}_+$, l'égalité est valable sur $\mathbb{R}_+$, sinon sur $\mathbb{R}_-$ (il faut que $e^{-\alpha x} \leq 1$)
Si $\alpha = ia$ où $a \in \mathbb{R}$ l'égalité précédente est valable sur $\left]-\frac{2\pi}{a}, \frac{2\pi}{a}.\right[$

Preuve. On dérive le membre de droite,

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{x^{p+1}}{p+1}-\frac{2p!}{\alpha^{p+1}}\sum_{k=0}^{p}\frac{(\alpha x)^{p-k}}{(p-k)\,!}L_{k+1}\left(e^{-\alpha x}\right)+\frac{2p!}{\alpha^{p+1}}\zeta\left(p+1\right)\right)'\\
=\;& x^{p}-\frac{2p!}{\alpha^{p+1}}\sum_{k=0}^{p}\frac{\alpha^{p-k}}{(p-k)\,!}\left(-\alpha x^{p-k}\frac{L_{k}\left(e^{-\alpha x}\right)}{e^{-\alpha x}}e^{-\alpha x}+(p-k)\,x^{p-k-1}L_{k+1}\left(e^{-\alpha x}\right)\right)\\
=\;& x^{p}+\frac{2p!}{\alpha^{p+1}}\sum_{k=0}^{p}\frac{\alpha^{p+1-k}}{(p-k)\,!}x^{p-k}L_{k}\left(e^{-\alpha x}\right)-\frac{p!}{2^{p}}\sum_{k=0}^{p-1}\frac{\alpha^{p-k}}{(p-k-1)\,!}x^{p-k-1}L_{k+1}\left(e^{-\alpha x}\right)\\
=\;& x^{p}+\frac{2p!}{\alpha^{p+1}}\sum_{k=0}^{p}\frac{\alpha^{p+1-k}}{(p-k)\,!}x^{p-k}L_{k}\left(e^{-\alpha x}\right)-\frac{p!}{2^{p}}\sum_{j=1}^{p}\frac{\alpha^{p+1-k}}{(p-j)\,!}x^{p-j}L_{j}\left(e^{-2x}\right)\\
=\;& x^{p}+\frac{2p!}{\alpha^{p+1}}\frac{\alpha^{p+1}}{p!}x^{p}L_{0}\left(e^{-\alpha x}\right)=x^{p}-x^{p}\frac{2e^{-\alpha x}}{e^{-\alpha x}-1}=-x^{p}\frac{e^{-\alpha x}+1}{e^{-\alpha x}-1}\\
=\;& x^{p}\coth\left(\frac{\alpha x}{2}\right)
\end{aligned}$$

Puis en $x=0$ le membre de droite est égal à 0. ■

4.3 Application : intégrales genre Dirichlet

On considère l'égalité (6) avec $\alpha=2i$,on obtient l'expression de l'intégrale $\int_0^x t^p\cot\mathrm{an}\,(t)\,dt$ à l'aide de polylogarithmes. Une intégration par parties (où l'on intègre la cotangente) donne

$$\begin{aligned}
\forall x\;>\;& 0,\forall p\geq 1,\;\int_0^x t^{p}\,\mathrm{cotan}\,(t)\,dt=x^{p}\ln\left(\sin x\right)-p\int_0^x t^{p-1}\ln\left(\sin t\right)\,dt\\
=\;& i^{-p}\left(\frac{(ix)^{p+1}}{p+1}-\frac{p!}{2^{p}}\sum_{k=0}^{p}\frac{(2\,ix)^{p-k}}{(p-k)\,!}L_{k+1}\left(e^{-2ix}\right)+\frac{p!\zeta(p+1)}{2^{p}}\right)
\end{aligned}$$

On obtient alors les égalités suivantes

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(t))dt &= -\frac{\pi\ln(2)}{2}\\
\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin(t))dt &= -\frac{\pi\ln(2)}{4}-\frac{G}{2}\\
\int_0^{\frac{\pi}{2}}t\ln(\sin(t))dt &= -\frac{\pi^2\ln(2)}{8}+\frac{7}{16}\zeta(3)\\
\int_0^{\frac{\pi}{4}}t\ln(\sin(t))dt &= -\frac{\pi^2\ln(2)}{32}-\frac{\pi G}{8}+\frac{35}{128}\zeta(3)
\end{aligned}$$

Avec $\alpha = 2$,on obtient

$$\begin{aligned}
\forall x &> 0, \forall p \geq 1, \int_0^x t^p \coth(t)\,dt = x^p \ln(\sinh x) - p \int_0^x t^{p-1} \ln(\sinh t)\,dt \\
&= \frac{x^{p+1}}{p+1} - \frac{p!}{2^p} \sum_{k=0}^{p} \frac{(2x)^{p-k}}{(p-k)!} L_{k+1}\left(e^{-2x}\right) + \frac{p!}{2^p}\zeta(p+1)
\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} \ln(\sinh(t))dt &= -\frac{5}{8}\ln^2 2 - \frac{\pi^2}{24} \\
\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} t\ln(\sinh(t))dt &= -\frac{1}{6}\ln^3 2 - \frac{\zeta(3)}{32} \\
\int_0^{\ln\phi} \ln(\sinh(t))dt &= -\ln\phi\ln 2 - \frac{\pi^2}{20} \\
\int_0^{\frac{\ln\phi}{2}} \ln(\sinh(t))dt &= -\frac{1}{2}\ln\phi\ln 2 - \frac{3}{8}\ln^2\phi - \frac{\pi^2}{30} \\
\int_0^{\ln\phi} t\ln(\sinh(t))dt &= -\frac{1}{2}\ln^2\phi\ln 2 - \frac{\zeta(3)}{20}
\end{aligned}$$

Pour le "folklore mathématique" On montre alors facilement que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \left(42t^2 - 18t + 1\right)\ln(\sin\pi t) = 0$$

Le minimum du trinôme $P(t) = 42t^2 - 18t + 1$ est obtenu en $t = \dfrac{3}{14}$, amusant !

5 Utilisation de F_1

5.1 Utilisation de la primitive de $t\coth(t)$

On a pour $p = 1$ et $\alpha = 2$

$$\forall x > 0,\ F_1(x) = \int_0^x t\coth(t)\,dt = \frac{1}{2}x^2 + x\ln\left(1 - e^{-2x}\right) + \frac{1}{2}L_2\left(e^{-2x}\right) + \frac{\pi^2}{12}$$

Ainsi pour $x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{u}\right)$ où $u \in\,]0,1[$, on obtient

$$\int_0^{-\frac{1}{2}\ln(u)} t\coth(t)\,dt = \frac{1}{8}\ln^2(u) - \frac{1}{2}\ln(u)\ln(1-u) - \frac{1}{2}L_2(u) + \frac{\pi^2}{12}$$

Partant de

$$\forall x \in [0,1],\ \int_0^x \frac{\operatorname{arcsinh} y}{y}dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n C_{2n}^n}{2^{2n}(2n+1)^2}x^{2n+1}$$

Le changement de variable $t = \operatorname{arcsinh}(y)$ donne alors

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n C_{2n}^n}{2^{2n}(2n+1)^2} x^{2n+1} &= \int_0^{\operatorname{arcsinh} x} t \coth(t)\, dt \\
&= \frac{1}{2} \operatorname{arcsinh}^2 x + \operatorname{arcsinh} x \ln\left(1 - e^{-2 \operatorname{arcsinh} x}\right) + \frac{1}{2} L_2\left(e^{-2 \operatorname{arcsinh} x}\right) + \frac{\pi^2}{12} \\
&= -\frac{1}{2} \ln^2\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) - \ln\left(x + \sqrt{1+x^2}\right) \ln(2x) - \frac{1}{2} L_2\left(\left(x - \sqrt{1+x^2}\right)^2\right) + \frac{\pi^2}{12}
\end{aligned}$$

Comme application, on obtient pour $u = \frac{1}{\phi^2}$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\ln(\phi)} t \coth(t)\, dt &= \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arcsinh} y}{y} dy = \frac{\pi^2}{20} \\
\frac{\pi^2}{10} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n C_{2n}^n}{16^n (2n+1)^2}
\end{aligned}$$

Comme autre application, $u = \frac{1}{2}$ donne

$$\begin{aligned}
\int_0^{\frac{\ln 2}{2}} t \coth(t)\, dt &= \int_0^{\frac{\sqrt{2}}{4}} \frac{\operatorname{arcsinh} y}{y} dy = \frac{\pi^2}{24} - \frac{\ln^2 2}{8} \\
\frac{\pi^2 \sqrt{2}}{12} - \frac{\sqrt{2} \ln^2 2}{4} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n C_{2n}^n}{32^n (2n+1)^2}
\end{aligned}$$

5.2 Utilisation de la primitive de $t \operatorname{cotan}(t)$

On a pour $p = 1$ et $\alpha = 2i$

$$\forall x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \int_0^x t \operatorname{cotan}(t)\, dt = \frac{ix^2}{2} + x \ln\left(1 - e^{-2ix}\right) + \frac{i}{2} L_2\left(e^{-2ix}\right) - \frac{i\pi^2}{12}$$

Partant de

$$\forall x \in [0,1], \int_0^x \frac{\arcsin y}{y} dy = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}(2n+1)^2} x^{2n+1}$$

le changement de variable $t = \arcsin(y)$ donne

$$\forall x \in [0,1], \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{2^{2n}(2n+1)^2} x^{2n+1} = \frac{i \arcsin^2 x}{2} + \arcsin x \ln\left(1 - e^{-2i \arcsin x}\right) + \frac{i}{2} L_2\left(e^{-2i \arcsin x}\right) - \frac{i\pi^2}{12}$$

Comme application, on a avec $x = 1$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{\arcsin y}{y} dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} t \operatorname{cotan}(t)\, dt = \frac{\pi \ln(2)}{2} \\
\sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{4^n (2n+1)^2} &= \frac{\pi \ln(2)}{2}
\end{aligned}$$

Avec $x = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{\arcsin y}{y} dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} t \operatorname{cotan}(t)\, dt = \frac{\sqrt{2}\ln(2)}{8} + \frac{\sqrt{2}G}{2} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{C_{2n}^n}{8^n (2n+1)^2} &= \frac{\sqrt{2}\ln(2)}{8} + \frac{\sqrt{2}G}{2}\end{aligned}$$

où G est la constante de Catalan.

6 Utilisation de F_2

6.1 Utilisation de la primitive de $t^2 \coth(t)$

On a pour $p = 1$ et $\alpha = 2$

$$\forall x > 0,\ F_1(x) = \int_0^x t^2 \coth(t)\, dt = \frac{x^3}{3} + x^2 \ln\left(1 - e^{-2x}\right) - xL_2\left(e^{-2x}\right) - \frac{1}{2}L_3\left(e^{-2x}\right) + \frac{\zeta(3)}{2}$$

Partant de

$$\int_0^x \frac{\operatorname{arcsinh}^2(y)}{y} = \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n}}{n^3 C_{2n}^n} x^{2n}$$

par changement de variable, on obtient $\forall x \in [0,1]$,

$$\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2^{2n}}{n^3 C_{2n}^n} x^{2n} = \frac{\operatorname{arcsinh} x^3}{3} + x^2 \ln\left(1 - e^{-2\operatorname{arcsinh} x}\right) - xL_2\left(e^{-2\operatorname{arcsinh} x}\right) - \frac{1}{2}L_3\left(e^{-2\operatorname{arcsinh} x}\right) + \frac{\zeta(3)}{2}$$

Avec $x = \frac{1}{2}$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{arcsinh}^2(y)}{y} &= \int_0^{\ln(\phi)} t^2 \coth(t)\, dt = \frac{\zeta(3)}{10} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^3 C_{2n}^n} &= -\frac{2}{5}\zeta(3) \qquad (7)\end{aligned}$$

C'est la derniere égalité qu'Apery a utilisé pour prouver l'irrationnalité de $\zeta(3)$ (Cette formule a été établie par Hjortnaes en 1953).
Avec $x = \frac{1}{2\sqrt{2}}$ on a l'égalité (dont je n'ai pas trouvé trace)

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{2\sqrt{2}}} \frac{\operatorname{arcsinh}^2(y)}{y} &= \int_0^{\frac{\ln(2)}{2}} t^2 \coth(t)\, dt = -\frac{\ln^3(2)}{24} + \frac{\zeta(3)}{16} \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n^3 C_{2n}^n} &= \frac{\ln^3(2)}{6} - \frac{\zeta(3)}{4}\end{aligned}$$

6.2 Utilisation de la primitive de $t^2 \operatorname{cotan}(t)$

Par le même genre de méthode on obtient

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{2n}}{n^3 C_{2n}^n}x^{2n} &= \frac{i\arcsin^3(x)}{3}+\arcsin^2(x)\ln\left(1-e^{-2i\arcsin x}\right)+i\arcsin(x)L_2\left(e^{-2i\arcsin x}\right)\\ &\quad +\frac{1}{2}L_3\left(e^{-2i\arcsin x}\right)-\frac{\zeta(3)}{2}\end{aligned}$$

ce qui avec $x=1$ donne

$$\begin{aligned}\int_0^1\frac{\arcsin^2(y)}{y}dy &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}t^2\operatorname{cotan} t\,dt=\frac{\pi^2\ln(2)}{4}-\frac{7}{8}\zeta(3)\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n}{n^3C_{2n}^n} &= \pi^2\ln(2)-\frac{7}{2}\zeta(3)\end{aligned}$$

puis avec $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\frac{\arcsin^2(y)}{y}dy &= \int_0^{\frac{\pi}{4}}t^2\operatorname{cotan} t\,dt=\frac{\pi^2\ln(2)}{32}+\frac{\pi G}{4}-\frac{35}{64}\zeta(3)\\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n^3C_{2n}^n} &= \frac{\pi^2\ln(2)}{8}+\pi G-\frac{35}{16}\zeta(3)\end{aligned}$$

En combinant ces deux dernières égalités avec celle trouvée par Apéry (7), on obtient

$$\begin{aligned}\pi^2\ln(2) &= \frac{1}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^{n-1}-35(-1)^n}{n^3C_{2n}^n}\\ \pi G &= \frac{1}{8}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n+3}-4^n-35(-1)^n}{n^3C_{2n}^n}\end{aligned}$$

7 Utilisation du développement de $t\coth t$

Si on exploite maintenant le développement en série entière (5)de $t\coth t$,on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}-4\frac{(-1)^n\zeta(2n)\alpha^{2n-1}x^{2n+p}}{(2\pi)^{2n}(2n+p)} &= \int_0^x t^p\coth\left(\frac{\alpha t}{2}\right)dt\\ &= \frac{x^{p+1}}{p+1}-\frac{2p!}{\alpha^{p+1}}\sum_{k=0}^{p}\frac{(\alpha x)^{p-k}}{(p-k)!}L_{k+1}\left(e^{-\alpha x}\right)+\frac{2p!}{\alpha^{p+1}}\zeta(p+1)\end{aligned}$$

On utilise ensuite cette relation dans deux cas particuliers

7.1 Avec $x=1,\ \alpha=i\pi$

On obtient alors

$$\sum_{n=0}^{\infty}-4\frac{(-1)^n\zeta(2n)(i\pi)^{2n-1}}{(2\pi)^{2n}(2n+p)}=\frac{1}{p+1}-\frac{2p!}{(i\pi)^{p+1}}\sum_{k=0}^{p}\frac{(i\pi)^{p-k}}{(p-k)!}L_{k+1}(-1)+\frac{2p!}{(i\pi)^{p+1}}\zeta(p+1)$$

Ceci se simplifie, avec $L_{k+1}(-1) = \left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)\zeta(n)$ si $n \geq 2$ et $L_1(-1) = -\ln(2)$, en

$$\forall p \geq 1,\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{4^{n-1}(2n+p)} = \frac{-i}{p+1} + 2p! \sum_{k=1}^{p} \frac{(-i)^k \left(2^{-k}-1\right)\zeta(k+1)}{\pi^k (p-k)!} - 2\frac{(-i)^p\, p!\zeta(p+1)}{\pi^p} - 2\ln(2)$$

On distingue alors deux cas suivant la parité de p

7.1.1 Cas où $p = 2q$ est pair

Dans ce cas on obtient en séparant les indices pairs et impairs dans la sommation

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{4^{n-1}(2n+2q)} &= 2\left((2q)! \sum_{k=1}^{q} \frac{(-1)^k \left(2^{-2k}-1\right)\zeta(2k+1)}{\pi^{2k}(2q-2k)!} - \frac{(-1)^q (2q)!\zeta(2q+1)}{\pi^{2q}} - \ln(2)\right) \\ &\quad + i\left(\frac{-\pi}{2q+1} + 2\times(2q)!\left(\sum_{k=1}^{q} \frac{(-1)^k\left(2^{-2k+1}-1\right)\zeta(2k)}{\pi^{2k-1}(2p-2k+1)!}\right)\right)\end{aligned}$$

Puisque le membre de droite est un réel, la partie imaginaire du membre de droite est nulle. On obtient alors les égalités

$$\forall q \geq 1,\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{4^{n}(2n+2q)} = \frac{(2q)!}{2} \sum_{k=1}^{q} \frac{(-1)^k \left(2^{-2k}-1\right)\zeta(2k+1)}{\pi^{2k}(2q-2k)!} - \frac{(-1)^q (2q)!\zeta(2q+1)}{2\pi^{2q}} - \frac{\ln(2)}{2} \tag{8}$$

$$\frac{-\pi}{2q+1} + 2\times(2q)!\left(\sum_{k=1}^{q} \frac{(-1)^k\left(2^{-2k+1}-1\right)\zeta(2k)}{\pi^{2k-1}(2p-2k+1)!}\right) = 0$$

Avec les égalités

$$\begin{aligned}\zeta(2k) &= \frac{(-1)^{k-1}(2\pi)^{2k}}{2(2k)!}B_{2k} \\ B_0 &= 1\end{aligned}$$

où les B_k sont les nombres de Bernoulli, on obtient (après quelques simplifications)

$$\forall q \geq 1,\ \sum_{k=0}^{q} \left(4^k - 2\right) C_{2q+1}^{2k} B_{2k} = 0 \tag{9}$$

7.1.2 Cas où $p = 2q+1$ est impair

On obtient de la même manière

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{4^{n}(2n+1)} = -\frac{\ln(2)}{2} \tag{10}$$

et

$$\forall q \geq 1,\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{4^{n}(2n+2q+1)} = \frac{(2q+1)!}{2} \sum_{k=1}^{q} \frac{(-1)^k \left(2^{-2k}-1\right)\zeta(2k+1)}{\pi^{2k}(2q+1-2k)!} - \frac{\ln(2)}{2} \tag{11}$$

et

$$\forall q \geq 1, \sum_{k=0}^{q} \left(4^{k}-2\right) C_{2q}^{2k} B_{2k} = -2^{2q} B_{2q} \tag{12}$$

On peut combiner les deux résultats (9) et (12)obtenues en

$$\forall n \geq 2,\ B_n + 2 \sum_{k=0}^{n} \left(2^{k-1}-1\right) \frac{C_n^k}{2^n} B_k = 0$$

7.1.3 Application à certaines séries associés à la fonction Zeta

En faisant $q = 1$ dans (8) et (11) on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{4^n (2n+2)} = \frac{7}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} - \frac{\ln(2)}{2} \tag{13}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{4^n (2n+3)} = \frac{9}{4} \frac{\zeta(3)}{\pi^2} - \frac{\ln(2)}{2} \tag{14}$$

En combinant (10), (13) et (14) on obtient alors (sans oublier que $\zeta(0) = -\frac{1}{2}$)

$$\frac{\zeta(3)}{\pi^2} = -\frac{4}{7} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{4^n (2n+1)(2n+2)} \tag{Euler 1772}$$

$$\frac{\zeta(3)}{\pi^2} = -2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{4^n (2n+2)(2n+3)}$$

$$\frac{\zeta(3)}{\pi^2} = -\frac{8}{9} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{4^n (2n+1)(2n+3)}$$

$$\frac{\zeta(3)}{\pi^2} = -\frac{8}{5} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{4^n (2n+1)(2n+2)(2n+3)}$$

La première égalité est due à Euler en 1772.
Voici quelques autres relations

$$\frac{\zeta(5)}{\pi^4} = -\frac{64}{675} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+4)\,\zeta(2n)}{4^n (2n+1)(2n+3)(2n+5)}$$

$$\frac{\zeta(5)}{\pi^4} = \frac{8}{217} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n-5)\,\zeta(2n)}{4^n (2n+1)(2n+2)(2n+4)}$$

$$\frac{\zeta(5)}{\pi^4} = -\frac{1}{6} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n+11)\,\zeta(2n)}{(2n+5)(2n+4)(2n+3)}$$

$$\frac{\zeta(7)}{\pi^6} = -\frac{1}{315} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\left(22n^2+231n+824\right)\zeta(2n)}{4^n (2n+7)(2n+6)(2n+5)(2n+4)}$$

$$\frac{\zeta(9)}{\pi^8} = -\frac{1}{35280} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\zeta(2n)}{4^n (2n+9)(2n+8)(2n+7)(2n+6)(2n+5)}$$

7.2 Avec $x = \frac{1}{2}$, $\alpha = i\pi$

On obtient alors, en tenant compte de

$$L_n\left(-i\right) = \frac{1}{2^n}\left(\frac{1}{2^{n-1}} - 1\right)\zeta\left(n\right) - i\beta\left(n\right)$$

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta(2n)}{16^n\left(2n+p\right)} &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{p}\left(\frac{2}{i\pi}\right)^k\frac{p!}{\left(p-k\right)!}\left(\frac{\left(\frac{1}{2^k}-1\right)\zeta(k+1)}{2^{k+1}} - i\beta\left(k+1\right)\right)\\ &\quad -\frac{1}{2}\left(\frac{2}{i\pi}\right)^p p!\zeta(p+1) - \frac{1}{4}\ln(2) - \frac{1}{8}\frac{i\pi\left(p+2\right)}{p+1}\end{aligned}$$

On va maintenant distinguer suivant la parité de p. On utilisera pour simplifier les expressions la relation

$$\beta\left(2p+1\right) = \frac{(-1)^p\ \pi^{2p+1}}{2^{2p+2}\left(2p\right)!}E_{2p}$$

où les E_k sont les nombres d'Euler définis par l'une des trois relation suivante

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cosh\left(z\right)} &= \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{E_k}{k!}z^k\\ \sum_{k=0}^{n}C_{2n}^{2k}E_k &= 0\\ E_{2k} &= -\frac{4^{2k+1}}{2k+1}B_{2k+1}\left(\frac{1}{4}\right) \text{ et } E_{2k+1} = 0\end{aligned}$$

où $B_k\left(x\right)$ est le $k-i\grave{e}me$ polynôme de Bernoulli.

7.2.1 Cas où p est pair

En séparant les indices de sommation pairs et impairs, on obtient le résultat suivant

$$\forall p \geq 1,\ \sum_{k=0}^{p}C_{2p}^{2k}\left(\frac{\left(4^k-2\right)B_{2k}}{2p-2k+1} - E_{2k}\right) = 0$$

qui exprime que la partie imaginaire du membre de droite est nulle

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta(2n)}{16^n\left(2n+2p\right)} &= +\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{p}\frac{(-1)^k\left(2p\right)!}{\pi^{2k}\left(2p-2k\right)!}\left(\left(\frac{1}{4^k}-1\right)\zeta(2k+1) + \frac{4^k\pi\,\beta\left(2k\right)}{2p-2k+1}\right)\\ &\quad -\frac{(-1)^p}{2}\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2p}\left(2p\right)!\,\zeta(2p+1) - \frac{\ln(2)}{4}\end{aligned}$$

Avec $p = 1$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta(2n)}{16^n\left(n+1\right)} = \frac{35}{4}\frac{\zeta(3)}{\pi^2} - \frac{\ln(2)}{2} - \frac{4G}{\pi}$$

7.2.2 Cas où p est impair

On obtient alors

$$\sum_{k=0}^{p} C_{2p+1}^{2k}\left(\frac{B_{2k}\left(4^{k}-2\right)}{2\left(p-k+1\right)}-E_{2k}\right)+\frac{B_{2p+2}\left(2^{4p+3}+2^{2p+1}-1\right)}{p+1}=0$$

et

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta(2n)}{16^{n}\left(2n+2p+1\right)} &= +\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{p}\left(-1\right)^{k}\frac{\left(2p+1\right)!}{\pi^{2k}\left(2p-2k+1\right)!}\left(\frac{\pi 4^{k}\beta\left(2k\right)}{2p+2-2k}+\zeta(2k+1)\left(\frac{1}{4^{k}}-1\right)\right)\\ &\quad -\frac{\ln(2)}{4}-\frac{\left(-1\right)^{p}}{2}\left(2p+1\right)!\left(\frac{2}{\pi}\right)^{2p+1}\beta\left(2p+2\right)\end{aligned}$$

Avec $p=0$, on obtient

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta(2n)}{16^{n}\left(2n+1\right)}=-\frac{\ln(2)}{4}-\frac{G}{\pi} \tag{15}$$

7.2.3 Application

Si l'on combine les égalités (10) et (15), on obtient

$$\frac{G}{\pi}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\zeta(2n)}{\left(2n+1\right)}\left(\frac{1}{2^{2n+1}}-\frac{1}{2^{4n}}\right)$$